الموضوع رقم (02)

شعبتي : رياضيات وَ تقني رياضي

التمرين الأول : ---------- (الهندسة الفضائية)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطة $A\left(1;-1;3\right)$ وَ المستوي $\left(P\right)$ الذي معادلته الديكارتية هي : $x-y+3z=0$.

1/ بين أن التمثيل الوسيطي للمستقيم $\left(OA\right)$ هي الجملة : $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=3t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

2/ أ- أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي $\left(Q\right)$ العمودي على المستقيم $\left(OA\right)$ في النقطة A .

ب- تحقق أن المستويان $\left(P\right)$ وَ $\left(Q\right)$ متوازيان .

3/ نعتبر الكرة $\left(S\right)$ المماسة للمستوي $\left(Q\right)$ في النقطة A وَ التي يقطعها المستوي $\left(P\right)$ وفق دائرة التي مركزها النقطة O وَ نصف قطرها $r=\sqrt{33}$.

أ- بين أن النقطة $\Omega\left(a;b;c\right)$ مركز الكرة $\left(S\right)$ ينتمي إلى $\left(OA\right)$ ثم استنتج أن : $b=-a$ وَ $c=3a$

ب- بين أن : $A\Omega^2-O\Omega^2=33$ ثم استنتج أن : $-a+b-3c=11$.

ج- أوجد المعادلة الديكارتية للكرة $\left(S\right)$ مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الثاني : ---------- (الأعداد المركبة)

1/ أوجد العدد الحقيقي x الذي يحقق : $\left(x-\sqrt{3}\,i\right)^2=-2-2\sqrt{3}\,i$

2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2z+3+2\sqrt{3}\,i=0$

نسمي حلي هذه المعادلة z_0 ، z_1 حيث $\left|z_0\right|<\left|z_1\right|$.

3/ أ- عين العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(z_1+1\right)^n$ عددا حقيقيا .

ب- احسب العدد $\left(\dfrac{z_1+1}{z_0}\right)^{2019}$ ، ماذا تستنتج ؟

4/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و لتكن M_0 ، M_1 وَ M ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 وَ z حيث : $z=1+2\cos\alpha+2i\sin\alpha$ مع α عدد حقيقي .

أ- ما هي قيمة α حتى يكون M عنصرا من $\left\{M_0;M_1\right\}$.

ب- إذا كانت النقطة M تختلف عن النقطتين M_0 و M_1 ، برهن أن المثلث M_0MM_1 قائم الزاوية في M .

ج- عين مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$ من المستوي لما يمسح α $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$.

التمرين الثالث : -- (الموافقات و الأعداد الأولية)

1/ أ- حلل العدد 357 إلى جداء عوامل أولية ثم بين أن جداء قواسم 357 هو $(357)^4$.

ب- عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $n\left(n^2+2\right)=357$.

ج- عين الأعداد الطبيعية a ، b وَ c المأخوذة بهذا الترتيب حدوداً لمتتالية حسابية أساسها 1 و تحقق : $a^3+b^3+c^3=1071$.

2/ أ- بين أن المجموع : $6+7+8+....+2004=1999\times 1005$.

ب- أوجد الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $(6+7+8+....+2004)x\equiv 1999[17]$.

3/ أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $2x-17y=1$.

ب- عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة السابقة و تحقق : $|x+y-10|<38$.

التمرين الرابع : -- (الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات)

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2/ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x)=f(x)-x$.

أ- اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $0<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leq 1$ وَ احسب $g(0)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g ، وَ استنتج إشارة $g(x)$.

3/ أ- اثبت أن (C_f) يقبل مبدأ المعلم كنقطة انعطاف ، ثم أكتب معادلة لـ (T) مماس لـ (C_f) في هذه النقطة .

ب- حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) ، ثم أنشئ (T) وَ (C_f) .

4/ نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0=2$ وَ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 وَ u_2 .

ب- اثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$ ، ثم أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

ج- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم استنتج نهايتها .

التصحيح النموذجي للموضوع رقم (02)
شعبتي : رياضيات وَ تقني رياضي

حل التمرين الأول

1/ تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (OA) :

لدينا O نقطة من المستقيم (OA) وَ $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ شعاع توجيه له ، إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (OA) هو :

$\begin{cases} x=0+(1)t \\ y=0+(-1)t \\ z=0+(3)t \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

2/ إيجاد المعادلة الديكارتية للمستوي (Q):

بما أن المستوي (Q) عمودي على المستقيم (OA) فإن $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q)

إذن معادلة المستوي (Q) من الشكل : $x-y+3z+d=0$

وَ $A\in(Q)$ منه : $x_A-y_A+3z_A+d=0$ و منه : $11+d=0$ أي : $d=-11$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي : $x-y+3z-11=0$.

– لنتحقق أن المستويان (P) وَ (Q) متوازيان:

بما أن المستويان (P) وَ (Q) لهما نفس شعاع الناظم و هو $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ فإنهما متوازيان .

3/ أ– لنبين أن النقطة Ω تنتمي إلى المستقيم (OA):

لدينا الكرة (S) مماسة للمستوي (Q) في النقطة A إذن : $(A\Omega)\perp(Q)$

وَ لدينا المستوي (P) يقطع الكرة (S) وفق دائرة مركزها النقطة O إذن : $(O\Omega)\perp(P)$

وَ بما أن $(P)//(Q)$ فإن : $(A\Omega)//(O\Omega)$ وَ هذا يعني أن : $\Omega\in(OA)$.

– استنتاج أن $b=-a$ وَ $c=3a$:

بما أن $\Omega\in(OA)$ فإن النقطة Ω تحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم (OA) إذن : $\begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}$ وَ بالتالي : $b=-a$ وَ $c=3a$.

ب– لنبين أن $A\Omega^2-O\Omega^2=33$:

لدينا $A\Omega$ نصف قطر الكرة (S) وَ $O\Omega$ هي مسافة النقطة Ω عن المستوي (P)

إذن حسب نظرية فيثاغورث لدينا : $O\Omega^2+r^2=A\Omega^2$ منه : $O\Omega^2+33=A\Omega^2$ إذن : $A\Omega^2-O\Omega^2=33$.

– استنتاج أن $-a+b-3c=11$:

لدينا : $O\Omega^2=x_\Omega^2+y_\Omega^2+z_\Omega^2$ منه : $O\Omega^2=a^2+b^2+c^2$

وَ : $A\Omega^2=(x_\Omega-x_A)^2+(y_\Omega-y_A)^2+(z_\Omega-z_A)^2$ منه : $A\Omega^2=(1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2$

وَ منه : $A\Omega^2=a^2+b^2+c^2-2a+2b-6c+11$

لدينا : $A\Omega^2-O\Omega^2=33$ تكافئ : $-2a+2b-6c+11=33$

إذن : $-a+b-3c=11$.

ج- إيجاد المعادلة الديكارتية للكرة (S) مع عناصرها المميزة :

لدينا : $\begin{cases} b=-a \ , \ c=3a \\ -a+b-3c=11 \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} b=-a \ , \ c=3a \\ -11a=11 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$ إذن : $\Omega(-1;1;-3)$

وَ لدينا : $A\Omega^2=a^2+b^2+c^2-2a+2b-6c+11$ تكافئ : $A\Omega^2=44$ إذن : $A\Omega=2\sqrt{11}$

وَ بالتالي المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) هي : $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=44$.

حل التمرين الثاني

1/ إيجاد العدد الحقيقي x :

لدينا : $\left(x-\sqrt{3}\,i\right)^2=-2-2\sqrt{3}\,i$ تكافئ : $x^2+\left(\sqrt{3}\,i\right)^2-2x\sqrt{3}i=-2-2\sqrt{3}\,i$

تكافئ : $x^2-3-2x\sqrt{3}i=-2-2\sqrt{3}\,i$

منه : $\begin{cases} x^2-3=-2 \\ -2x\sqrt{3}=-2\sqrt{3} \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x^2=1 \\ x=1 \end{cases}$ إذن : $x=1$.

2/ حل المعادلة : $z^2-2z+3+2\sqrt{3}\,i=0$

المميز المختصر للمعادلة هو $\Delta'=(-1)^2-(1)\left(3+2\sqrt{3}\,i\right)$ منه : $\Delta'=-2-2\sqrt{3}\,i$

و حسب السؤال الأول يكون لدينا : $\Delta'=\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^2$

إذن حلول المعادلة هما : $z_0=\sqrt{3}\,i$ وَ $z_1=2-\sqrt{3}\,i$ (لاحظ أن الشرط $|z_1|<|z_0|$ محقق) .

3/ أ- تعيين العدد الطبيعي n:

لدينا : $|z_1+1|=\left|3-\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ وَ $\arg(z_1+1)=\theta$ حيث : $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$ منه : $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$

إذن : $z_1+1=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)$ منه : $(z_1+1)^n=\left(2\sqrt{3}\right)^n\left(\cos\left(\dfrac{-\pi n}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi n}{6}\right)\right)$

$(z_1+1)^n$ عددا حقيقيا إذا وفقط إذا كان : $\sin\left(\dfrac{-\pi n}{6}\right)=0$ منه : $\dfrac{\pi n}{6}=k\pi$ و منه : $n=6k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ب- حساب العدد : $\left(\dfrac{z_1+1}{z_0}\right)^{2019}$

لدينا: $\dfrac{z_1+1}{z_0}=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{3}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}=2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\right)$

منه : $\left(\dfrac{z_1+1}{z_0}\right)^{2019}=2^{2019}\left(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}2019\right)+i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}2019\right)\right)=2^{2019}\left(\underbrace{\cos(-1346\pi)}_{=1}+i\underbrace{\sin(-1346\pi)}_{=0}\right)$

إذن : $\left(\frac{z_1+1}{z_0}\right)^{2019}=2^{2019}$ و هو عدد حقيقي موجب .

4/ أ- تعيين قيمة α:

n عنصراً من $\{M_0;M_1\}$ معناه : $M=M_0$ أو $M=M_1$

إذا كان $M=M_0$ فإن : $z=z_0$ أي : $\begin{cases}1+2\cos\alpha=0\\2\sin\alpha=\sqrt{3}\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{1}{2}\\\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ إذن : $\alpha\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

إذا كان $M=M_1$ فإن : $z=z_1$ أي : $\begin{cases}1+2\cos\alpha=2\\2\sin\alpha=-\sqrt{3}\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ إذن : $\alpha\equiv\frac{5\pi}{3}[2\pi]$.

ب- لنبرهن أن المثلث $M_1\,M_0M$ قائم الزاوية في M:

لدينا : $M_0\left(0;\sqrt{3}\right)$ و $M_1\left(2;-\sqrt{3}\right)$ و $M\left(1+2\cos\alpha\,;\,2\sin\alpha\right)$

منه : $\overrightarrow{M_0M}\left(1+2\cos\alpha\,;2\sin\alpha-\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{M_1M}\left(-1+2\cos\alpha\,;2\sin\alpha+\sqrt{3}\right)$

لنحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{M_0M}\bullet\overrightarrow{M_1M}$: $\overrightarrow{M_0M}\bullet\overrightarrow{M_1M}=(1+2\cos\alpha)(-1+2\cos\alpha)+\left(2\sin\alpha-\sqrt{3}\right)\left(2\sin\alpha+\sqrt{3}\right)$

$$=(2\cos\alpha)^2-1^2+(2\sin\alpha)^2-\sqrt{3}^2$$
$$=4\cos^2\alpha-1+4\sin^2\alpha-3$$
$$=4\underbrace{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}_{=1}-4$$
$$=4-4$$
$$=0$$

بما أن $\overrightarrow{M_0M}\bullet\overrightarrow{M_1M}=0$ فإن $M_1\,M_0M$ مثلث قائم في M .

ج- تعيين مجموعة النقط $M(x;y)$:

لدينا : $M\left(1+2\cos\alpha\,;\,2\sin\alpha\right)$ معناه : $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x-1=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ بالتربيع نجد : $\begin{cases}(x-1)^2=4\cos^2\alpha\\y^2=4\sin^2\alpha\end{cases}$

بالجمع طرف إلى طرف نجد : $(x-1)^2+y^2=4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha$ تكافئ : $(x-1)^2+y^2=4\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)$

أي : $(x-1)^2+y^2=4$ ، إذن مجموعة النقط $M(x;y)$ لما α يمسح $\mathbb{R}-\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$ هي دائرة مركزها $\omega(1;0)$ و نصف قطرها 2

باستثناء النقطتين $M_0\left(0;\sqrt{3}\right)$ و $M_1\left(2;-\sqrt{3}\right)$.

حل التمرين الثالث

1/ أ- تحليل إلى جداء عوامل أولية العدد 357:

357	3
119	7
17	17
1	

حسب عملية القسمة المقابلة لدينا : $357=3\times7\times17$.

$(357)^4$

- لنبين أن جداء قواسم 357 هو $(357)^4$:

مجموعة قواسم 357 هي : $\{1\,;\,3\,;\,7\,;\,17\,;\,3\times7\,;\,3\times17\,;\,7\times17\,;\,3\times7\times17\}$

إذن جداء قواسم 357 هو : $3^4\times7^4\times17^4=(3\times7\times17)^4$ منه : $3^4\times7^4\times17^4=357^4$.

ب- تعيين العدد الطبيعي n :

لدينا : $n(n^2+2)=357$ معناه n يقسم 357 أو n^2+2 يقسم 357 .

إذن : $n\in D_{357}$ منه : $n\in\{1;3;7;17;21;52;119;357\}$

$(n^2+2)\in D_{357}$ منه : $(n^2+2)\in\{1;3;7;17;21;51;119;357\}$ و منه : $n^2\in\{-1;1;5;15;19;49;117;355\}$

أي : $n\in\{1;7\}$ و بالتالي $n=7$.

ج- تعيين الأعداد الطبيعية a ، b و c :

بما أن الحدود تشكل متتالية حسابية أساسها 1 فإن : $a=b-1$ و $c=b+1$

لدينا : $a^3+b^3+c^3=1071$ تكافئ : $(b-1)^3+b^3+(b+1)^3=1071$

تكافئ : $(b^3-3b^2+3b-1)+b^3+(b^3+3b^2+3b+1)=1071$

تكافئ : $3b^3+6b=1071$ تكافئ : $3b(b^2+2)=1071$

تكافئ : $b(b^2+2)=357$ و حسب السؤال 1/ ب نجد : $b=7$

إذن : $a=6$ ، $b=7$ و $c=8$.

2/ أ- لنبين أن المجموع $6+7+8+....+2004=1999\times1005$:

لدينا : $(6+7+8+....+2004)$ مجموع 1999 حد لمتتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 6

منه : $6+7+8+....+2004=\dfrac{1999}{2}\times(6+2004)=\dfrac{1999}{2}\times2010$ إذن : $6+7+8+....+2004=1999\times1005$.

ب- إيجاد الأعداد الصحيحة x :

لدينا : $(6+7+8+....+2004)x\equiv1999[17]$ تكافئ : $1999\times1005x\equiv1999[17]$

و بما أن 17 و 1999 أوليين فإن : $1005x\equiv1[17]$ تكافئ : $2x\equiv1[17]$ تكافئ : $18x\equiv9[17]$ تكافئ : $x\equiv9[17]$

إذن : $x=17k+9$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3/ أ- حل المعادلة التالية $2x-17y=1$:

لدينا : $2x-17y=1$ تكافئ : $2x=1+17y$ تكافئ : $2x\equiv1[17]$ نضرب الموافقة في 9 نجد : $18x\equiv9[17]$

منه : $x\equiv9[17]$ و منه : $x=17k+9$ ثم نعوض $x=17k+9$ في المعادلة $2x-17y=1$ نجد : $y=2k+1$

إذن حلول المعادلة هي : $(x;y)=\{(17k+9;2k+1)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب- تعيين الثنائيات $(x;y)$:

لدينا : $|x+y-10|<38$ تكافئ : $|17k+9+2k+1-10|<38$ تكافئ : $|19k|<38$ تكافئ : $|k|<2$ تكافئ : $-2<k<2$

أي : $k\in\{-1;0;1\}$ و بالتالي : $(x;y)\in\{(-8;-1),(9;1),(26;3)\}$.

حل التمرين الرابع

1/ أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}-x}_{+0}}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$ منه : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

وَ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}+x}_{+\infty}\right)$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f معرفة وَ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منه : $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)>0$ وَ بالتالي f دالة متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2/أ- لنثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $0<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\le 1$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2+1>0$ منه : $\sqrt{x^2+1}>0$ أي : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ ... (1)

أيضاً من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2\ge 0$ منه : $x^2+1\ge 1$ أي : $\sqrt{x^2+1}\ge 1$ وَ بالتالي : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\le 1$ ... (2)

من (1) وَ (2) ينتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $0<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\le 1$.

- حساب $g(0)$: لدينا : $g(0)=f(0)-0=\ln 1$ منه : $g(0)=0$.

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا الدالة g معرفة وَ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=f'(x)-1$ منه : $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1$

بما أن : $0<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\le 1$ فإن : $-1<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\le 0$ أي : $-1<g'(x)\le 0$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x)\le 0$ و بالتالي g دالة متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

- استنتاج إشارة $g(x)$:

بما أن g دالة متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ وَ $g(0)=0$ فإنه :

- إذا كان : $x\in]-\infty;0[$ فإن : $g(x)>0$.
- إذا كان : $x\in[0;+\infty[$ فإن : $g(x)\le 0$.

3/أ- إثبات أن (C_f) يقبل مبدأ المعلم كنقطة انعطاف :

لدينا : $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ منه : $f''(x)=-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}^2}=-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

إشارة $f''(x)$ هي من إشارة $(-x)$ لأن المقام دوماً موجب .

بما أن $f''(x)$ تنعدم عند 0 وَ تغير من إشارتها ، فإن مبدأ المعلم $O(0;0)$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

– كتابة معادلة المماس (T):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث : $f(0)=0$ وَ $f'(0)=1$

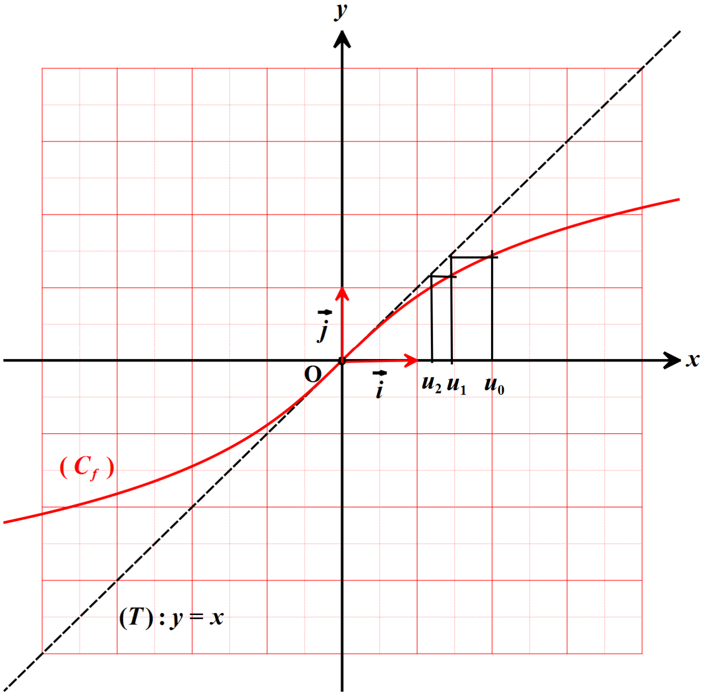
إذن : $(T): y = x$.

ب– تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) :

لدينا : $g(x)=f(x)-x$ و حسب ما سبق يتبين أنه :

- إذا كان : $x \in]-\infty;0[$ فإن : $g(x)>0$ أي : $f(x)-x>0$ وَ بالتالي (C_f) يقع فوق (T) .
- إذا كان : $x \in]0;+\infty[$ فإن : $g(x)<0$ أي : $f(x)-x<0$ وَ بالتالي (C_f) يقع تحت (T) .

– الرسم :



4/ أ– تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 وَ u_2: (أنظر الشكل)

ب– لنثبت من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$: $p(n)$ (نستعمل البرهان بالتراجع)

- لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=2>0$ منه $p(0)$ محققة .
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n>0$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1}>0$

لدينا حسب فرضية التراجع أن $u_n>0$ وَ f دالة متزايدة تماماً منه : $f(u_n)>f(0)$ أي : $u_{n+1}>0$ منه $p(n+1)$ صحيحة .

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $u_n>0$.

– دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = g(u_n)<0$ لأن : $u_n>0$ و $g(x)<0$ على المجال الموجب .

منه (u_n) متتالية متناقصة تماماً .

ج– لنبين أن المتتالية (u_n) متقاربة :

– بما أن $u_n>0$ أي (u_n) محدودة من الأسفل وَ متناقصة تماماً فهي متقاربة .

– بما أن (u_n) متقاربة فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \ell$

لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$ منه : $\ell = f(\ell)$ أي : $f(\ell)-\ell=0$ وَ بالتالي : $g(\ell)=0$ منه : $\ell=0$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$.